PROCEEDINGS OF IAM, V.7, N.2, 2018, pp.142-152

НОВЫЙ АЛГОРИТМ ПРОГОНКИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ ДВУХТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ*

Ф.А.Алиев[1], М.М. Муталлимов[1], И.А. Магеррамов[1]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: mmutallimov@bsu.edu.az

Резюме. Приводится алгоритм решения линейно-квадратичной задачи оптимизации с неразделенными двухточечными краевыми условиями (ЛКЗОНКУ), повышающий размерность исходной системы в два раза. На основе приведенных здесь формул, предлагается новый алгоритм прогонки. В отличие от известных методов, здесь не требуется решения линейных матричных и нелинейных уравнений Риккати, где при решении многоточечных задач сталкивается серьезными трудностями при переходе через узловых точек. Результаты иллюстрируется числовым примером.

Ключевые слова: алгоритм прогонки, оптимизация, неразделенные двухточечные краевые условия.

AMS Subject Classification: 49J15, 49M25, 49N10.

Введение. Как известно задачи оптимизации с неразделенными двухточечными и многоточечными краевыми условиями [7,8,10] играют важную роль при решении многих практических задач, как построение оптимальных программных траекторий и управлений для движения шагающих аппаратов [9,12,15], для движения как и газа, так и газо-жидкостной смеси на кольцевом пространстве и подъемнике [6,17] при добыче нефти газлифтым способом. Поскольку даже для решения нелинейных задач оптимизации [7,12,15] используются метод квазилинеаризации с помощью решения линейно квадратичной задачи оптимизации (ЛКЗО) до настоящего времени последний привлекает внимание исследователей [1,3,4].

Существуют разные методы решения ЛКЗО с неразделенными краевыми условиями, где сначала с помощью решения соответствующего дифференциального уравнения Эйлера-Лагранжа находятся недостающие краевые данные и далее восстанавливаются оптимальные решения, которые называются методом, повышающим размерность исходной системы [8,10]. В случае, когда длина интервала определения системы является достаточно большой, для их решения используется метод Мощинского [2,5,9], который в

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 06.11.2018

два раза уменьшает длину интервала, а повышает размерности исходной системы в два раза. Здесь трудно гарантировать хорошую обусловленность конечных систем для нахождения как начальных данных, так и в любой точке внутри интервала. Поэтому в [7-10,18] разрабатывается метод прогонки для решения ЛКЗО с неразделенными краевыми условиями, который требует решать несколько нелинейных систем дифференциальных уравнений, не повышающих размерность исходной системы. В работе [4] результаты [7,8,10] приведены в случае многоточечных краевых условий, а в [1,3] приведены контр-пример, где показывается не оптимальность полученных результатов. Повидимому в [1,3,4] проблемы связаны с переходом в уравнение Риккати, матричных уравнений от узловых точек, который требует сложных исследований.

В данной работе на основе метода, повышающих размерности [9] исходной системы, приведен метод прогонки для решения ЛКЗО оптимизации с неразделенными краевыми условиями, в трехточечном случае такие неприятности [3] не возникают, т.е. приведенный пример в [3] здесь легко решается. Исходя из результатов [1] здесь исследуются дискретный случай, который может распространяться в непрерывный случай.

2. Постановка задачи и метод, повышающий размерности исходной системы.

Сначала рассмотрим ЛК задачи оптимизации с двухточечными неразделенными краевыми условиями, т.е. пусть движение объекта описывается следующей дискретной линейной управляемой системой [13,15]

$$x(i+1)=\psi(i)x(i)+\Gamma(i)u(i), \qquad i=1, 2, ..., \ell, \tag{1}$$

с неразделенными краевыми условиями

$$\Phi_1 x(0)-\Phi_2 x(\ell)=q, \tag{2}$$

где $x(i)$ - n -мерный фазовый вектор, $u(i)$ - m мерное управляющее воздействие, $\psi(i)$, $\Gamma(i)$ и постоянные Φ_1, Φ_2 матрицы размерности $n\times n$, $n\times m$ и $k\times n$, соответственно, известный постоянный вектор q имеет размерность $k\times 1$, соответственно.

Требуется найти такие векторы $x(i)$, $u(i)$, чтобы квадратичный функционал

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}\left(x'(i)R(i)x(i)+u'(i)C(i)u(i)\right) \tag{3}$$

при ограничении (1), (2) получил минимальное значение, где $R(i)=R'(i)\geq 0$, $C(i)=C'(i)>0$ симметричные матрицы размерности $n\times n$, $m\times m$ соответственно, штрих означает операцию транспонирования.

Используя необходимые условия оптимальности в форме Эйлера-Лагранжа задачи (1)-(3) из [13,15] легко показывается, что решение задачи

(1)-(3) сводится к решению следующей системы линейных конечно-разностных уравнений $2n$ порядка

$$\left.\begin{aligned} x(i+1) &= \psi(i)x(i) - M(i)\lambda(i+1) \\ \lambda(i) &= R(i)x(i) + \psi'(i)\lambda(i+1) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

со следующими краевыми условиями

$$\begin{aligned} \Phi_1'\nu + \lambda(0) = 0 \\ -\Phi_2'\nu + \lambda(\ell) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

и (2), $M(i) = \Gamma(i)C^{-1}(i)\Gamma'(i)$.

Обозначая $\Phi = [\Phi_1, -\Phi_2]$ и используя результаты [14] матрица Φ' представляется в виде

$$\Phi' = P^{-1}\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} Q^{-1},$$

где P и Q некоторые квадратичные, E - единичная матрицы размерности $2n \times 2n$, $n \times n$ и $k \times k$ соответственно.

Пусть матрица P разбита на блоки

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$$

где матрицы P_1, P_2 и P_3, P_4 размерности $k \times n$ и $(2n-k) \times n$ соответственно. Тогда в [9] показано, что решение задачи (1), (2) сводится к решению уравнения (4) со следующими $2n$ краевыми условиями

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & -P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Phi_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\ell) \\ \lambda(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

а закон управления $u(i)$ определяется в виде

$$u(i) = -C^{-1}(i)\Gamma'(i)\lambda(i+1). \tag{7}$$

Как показано в [9], недостающие краевые данные определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} \psi(0,\ell) & 0 & -E & -M(0,\ell) \\ R(0,\ell) & -E & 0 & \psi'(0,\ell) \\ \Phi_1 & 0 & -\Phi_2 & 0 \\ 0 & -P_3 & 0 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \\ x(\ell) \\ \lambda(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где $\psi(0,\ell)$, $M(0,\ell)$, $R(0,\ell)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$\psi(i,j) = \psi(i+j-1)Q(i,j-1)\psi(i,j-1), \psi(i,1) = \psi(i)$$
$$M(i,j) = M(i+j-1) + \psi(i+j-1)Q(i,j-1)M(i,j-1)\psi'(i+j-1),\ M(i,1) = M(i)$$
$$R(i,j) = R(i,j-1) + \psi'(i,j-1)R(i+j-1)Q(i,j-1)\psi(i,j-1), R(i,1) = R(i) \tag{9}$$

$Q(i,j) = \left(E + M(i,j)R(i+j)\right)^{-1}$
при $i = 0$, $j = \ell$.

Решив системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (8) находим начальные и конечные значения $x(0)$, $\lambda(0)$, $x(\ell)$, $\lambda(\ell)$. Далее как показано в [9] текущие значения $x(i)$, $\lambda(i)$ определяются из следующих СЛАУ

$$\begin{bmatrix} E & M(0,i) \\ 0 & \psi'(0,i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ \lambda(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(0,i) & 0 \\ -R(0,i) & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} \tag{10}$$

или

$$\begin{bmatrix} \psi(i,\ell-i) & 0 \\ R(i,\ell-i) & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ \lambda(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & M(i,\ell-i) \\ 0 & -\psi'(i,\ell-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\ell) \\ \lambda(\ell) \end{bmatrix} \tag{11}$$

в зависимости от вырожденности матриц $\psi(i)$. Таким образом, находя $x(0)$, $\lambda(0)$, $x(\ell)$, $\lambda(\ell)$ из СЛАУ (8), текущие значения $x(i)$, $\lambda(i)$ восстанавливаем из (10) и (11) в зависимости от в каких точках i вырождается $\psi(i)$. Далее оптимальное управление $u(i)$ восстанавливается по формуле (7). Отметим, что $\psi(0,\ell)$, $M(0,\ell)$, $R(0,\ell)$ определяются из (9) при $i = 0$, $j = \ell$.

Отметим, что такой метод при большой размерности задачи (1)-(3) может сталкиваться с трудностями, т.е. для нахождения начальных данных $x(0)$ (вектор n размерности) требуется решать $4n$ размерности СЛАУ (8). Также для определения $x(i)$ для общего случая ($\psi(i)$ не существует) тоже требуется решать СЛАУ (10), (11). Поэтому в [3,16] предложены метод прогонки для решения задачи (1)-(3), вопреки (8) и (10), (11) гораздо уменьшает размерности аналогичных уравнений для определения $x(0)$ и $x(i)$. Однако, эти методы при решении задачи оптимизации многоточечных краевых задач [3] сталкиваются с трудностями. В следующем пункте функции приводится новый алгоритм прогонки, который может быть успешно распространяться [3] и к многоточечному общему случаю [4].

3. Новый метод прогонки.

Используем идеи метода прогонки [7-10,18] вместо уравнений (8) для определения $x(0)$, $\lambda(0)$, $x(\ell)$, $\lambda(\ell)$, используя первые два уравнения, т.е. поставляя $\lambda(\ell)$ из второго уравнения (5) во второе уравнение (8), имеем

$$R(0,\ell)x(0) + (\Phi_1' - \psi'(0,\ell)\Phi_2')\nu = 0\,. \tag{12}$$

Теперь определив $x(\ell)$ из первого уравнения (8) в виде

$$x(\ell) = \psi(0,\ell)x(0) - M(0,\ell)\lambda(\ell) \tag{13}$$

подставим эту формулу (13) в (2), после некоторых преобразований имеем

$$\Phi_1 x(0) - \Phi_2\psi(0,\ell)x(0) + \Phi_2 M(0,\ell)\lambda(\ell) = q\,. \tag{14}$$

Далее учитывая из последнего соотношения $\lambda(\ell)$ из (5) в (14) получим

$$(\Phi_1 - \Phi_2\psi(0,\ell))x(0) + \Phi_2 M(0,\ell)\Phi_2'\nu = q\,, \qquad (15)$$

где объединив (12), (15) для определения $x(0)$, ν имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{bmatrix} R(0,\ell) & \Phi_1' - \psi'(0,\ell)\Phi_2' \\ \Phi_1 - \Phi_2\psi(0,\ell) & -\Phi_2 M(0,\ell)\Phi_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Отметим, что главная матрица СЛАУ (16) является симметричной, а это позволяет решать эту систему более точно.

Остановимся на вычислении $x(i)$ и $u(i)$ без использовании $\lambda(i)$. Для этого предположим, что $\psi^{-1}(i)$ из (4) существует. Тогда из второго уравнения (4) $\lambda(i+1)$ представим в следующем виде

$$\lambda(i+1) = -\psi'^{-1}(i)R(i)x(i) + \psi'^{-1}(i)\lambda(i)\,. \qquad (17)$$

Из (17) и первого уравнения (5) для $i = 0$ имеем

$$\lambda(1) = -\psi'^{-1}(0)R(0)x(0) - \psi'^{-1}(0)\Phi_1'\nu\,,$$

а для $i = 1$

$$\lambda(2) = -\psi'^{-1}(1)R(1)x(1) + \psi'^{-1}(1)\lambda(1) = -\psi'^{-1}(1)R(1)x(1) -$$
$$-\psi'^{-1}(1)\psi'^{-1}(0)R(0)\lambda(0) - \psi'^{-1}(1)\psi'^{-1}(0)\Phi_1'\nu$$

и т.п. С помощью математической индукции можно показать, что

$$\lambda(i+1) = -\sum_{k=0}^{i}\left(\prod_{j=k}^{i}\psi'^{-1}(i+k-1)\right)R_k x_k - \prod_{k=0}^{i}\left(\psi'^{-1}(i-1)\right)\Phi_1'\nu\,. \qquad (18)$$

Учитывая формулы (18) в (17) и (7) находим $x(i+1)$ через $x(i)$ и ν в следующем виде

$$x(i+1) = \psi(i)x(i) - M(i)\left\{\sum_{k=0}^{i}\left(\prod_{j=k}^{i}\psi'^{-1}(i+k-j)\right)R(k)x(k) -\right.$$
$$\left.-\left(\prod_{k=0}^{i}\psi_{i-k}^{-1}\right)\Phi_1'\nu\right\}, \qquad (i = 0,1,\ldots,\ell-1) \qquad (19)$$

а $u(i)$ будет

$$u(i) = C^{-1}(i)\Gamma'(i)\left\{\sum_{k=0}^{i}\left(\prod_{j=k}^{i}\psi'^{-1}(i+k-j)\right)R(k)x(k) + \left(\prod_{k=0}^{i}\psi'(i-k)\right)\Phi_1'\nu\right\},\ i = 0,1,\ldots,\ell-1 \qquad (20)$$

При заданных матрицах из (1)-(3) - $\psi(i)$, $\Gamma(i)$, Φ_1, Φ_2, $C(i)$, $R(i)$, q из СЛАУ (16) находим $x(0)$, ν. Далее управление $u(i)$ определяем из соотношений (20), а траектории $x(i)$ из (19).

Таким образом, имеем следующий вычислительный

АЛГОРИТМ

1. Формулируются заданные матрицы $\psi(i)$, $\Gamma(i)$, Φ_1, Φ_2, $C(i)$, $R(i)$ и q вектор из задачи (1)-(3)
2. Из соотношений (9) при матричных условиях $\psi(0,1)=\psi(0)$, $M(0,1)=M(0)$, $R(0,1)=R(0)$ вычисляются $\psi(0,\ell)$, $R(0,\ell)$ и $M(0,\ell)$.
3. Формируются главная матрица и вектор на правой части СЛАУ (16)
4. Решается СЛАУ (16)
5. Управление $u(i)$ вычисляется из (20), а траектории $x(i)$ из (19)

Отметим, что алгоритм (1) является алгоритмом «прогонки». Фактически в этом алгоритме отсутствует использование сопряженного вектора $\lambda(i)$.

Пример: Рассмотрим случай, когда в задаче (1)-(3) $n=m=k=1$, $\ell=4$, а постоянные $\psi(i)$, $\Gamma(i)$, ϕ_1, ϕ_2, q, $R(i)$ и $C(i)$ определяются образом

$$\left.\begin{aligned} &\psi(0)=\psi(1)=\psi(2)=\psi(3)=1,\\ &\Gamma(0)=\Gamma(1)=\Gamma(2)=\Gamma(3)=1,\\ &\Phi_1=1,\ \Phi_2=1,\ q=1,\\ &R(0)=R(1)=R(2)=R(3)=1,\\ &C(0)=C(1)=C(2)=C(3)=1.\end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

Тогда задача (1)-(3) принимает следующий вид

$$x(i+1)=x(i)+u(i),\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

$$x(0)-x(4)=1$$

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}\left[x^2(i)+u^2(i)\right]\to\min. \tag{22}$$

Используя рекуррентные соотношение (9) мы после некоторых вычислений получим, что

$$\psi(0,\ 4)=\frac{1}{13},\qquad M(0,\ 4)=\frac{21}{13},\qquad R(0,\ 4)=\frac{21}{13}.$$

Подставляя эти значения в (16) мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{21}{13}x(0)+\dfrac{12}{13}\nu=0 \\ \dfrac{12}{13}x(0)-\dfrac{21}{13}\nu=1 \end{cases} \tag{23}$$

решения который равно $x(0)=\dfrac{4}{15}$, $\nu=-\dfrac{7}{15}$.

Далее, используя формул (19) и (20) находим решения задачи (22) в следующем виде

$$x(0)=\frac{4}{15},\quad x(1)=\frac{1}{15},\quad x(2)=-\frac{1}{15},\quad x(3)=-\frac{4}{15},\quad x(4)=-\frac{11}{15}$$

$$u(0)=-\frac{1}{5},\quad u(1)=-\frac{2}{15},\quad u(2)=-\frac{1}{5},\quad u(3)=-\frac{7}{15}.$$

А функционал получает минимальное значение $J=\dfrac{7}{30}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev F.A. Comments on ‘Sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions’ by M. Mutallimov, R. Zulfuqarova and L. Amirova // Adv. Differ. Equ. 2016, 131 (2016)
2. Moszynski K. A method of solving the boundary value problem for a system of linear ordinary differensial equations // Algorytmy, 1964, v.11, №3, p.25-43.
3. Mutallimov M.M., Amirova L.I., Aliev F.A., Faradjova Sh.A., Maharramov I.A. Remarks to the paper: sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions // TWMS J. Pure Appl. Math. V.9, N.2, 2018, pp. 243-246.
4. Mutallimov M.M., Zulfugarova R.T., Amirova L.I. Sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions // Adv. Differ. Equ. 2015, 233 (2015).
5. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки). // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, Т.1, №3, с. 542-545.
6. Алиев Ф. А., Муталлимов М. М. , Исмаилов Н. А. , Раджабов М. Ф. Алгоритмы построения оптимальных регуляторов при газлифтной эксплуатации // Автоматика и телемеханика, 2012, № 8, с.3–15.

7. Алиев Ф.А. Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями. // Дифференциальные уравнения, 1986, № 2, с. 345-347.
8. Алиев Ф.А. Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями. // Известия АН СССР, сер.техн. кибернетика, 1985, № 6, с. 138-146.
9. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Елм, 1989, 320 с.
10. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Методы решения задач оптимизации с двухточечными краевыми условиями. Препринт / АН Азерб.ССР, Институт физики, Баку, 1985, № 151, 63 с.
11. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968, 186 с.
12. Бордюг В.Л., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи управления шагающими аппаратами. Киев, Наук. думка, 1985, 264 с.
13. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Москва: Мир, 1972, 554 с.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967, 576 с.
15. Ларин В.Б. Управление шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка, 1980, 168 с.
16. Максудов Ф.Г., Алиев Ф.А. Оптимизация импульсных систем с неразделенными двухточечными граничными условиями // Докл.АН СССР, 1985, т.280, № 4, с. 796-798.
17. Муталлимов М.М., Алиев Ф.А. Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин. Saarbrücken (Deutscland): LAP LAMBERT, 2012, 164 с.
18. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. Москва: Мир, 1971, 424 с.
19. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев: Наук.думка, ч.I, 1963, 196 с, ч.II, 1966, 244 с.

NEW ALGORITHM OF SOLUTION OF LINEAR SQUARE OPTIMIZATION PROBLEM WITH NON-SEPARATED TWO-POINT BOUNDARY CONDITIONS

F.A.Aliev, M.M.Mutallimov, I.A.Maharramov

Institute of Applied Mathematics, BSU, Baku, Azerbaijan
e-mail: mmutallimov@bsu.edu.az

Abstract. An algorithm is presented for solving a linear-quadratic optimization problem with unseparated two-point boundary conditions (LCTOR), which increases the dimension of the original system by a factor of two. Based on the formulas presented here, a new algorithm is proposed. In contrast to the known methods, here it is not necessary to solve linear matrix and nonlinear Riccati equations, where, when solving multipoint problems, it encounters serious difficulties in passing through nodal points. The results are illustrated with a numerical example.

Keywords: sweep algorithm, optimization, unseparated two-point boundary conditions

References

1. Aliev F.A. Comments on ‘Sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions’ by M. Mutallimov, R. Zulfuqarova and L. Amirova // Adv. Differ. Equ. 2016, 131 (2016)
2. Moszynski K. A method of solving the boundary value problem for a system of linear ordinary differensial equations // Algorytmy, 1964, v.11, №3, p.25-43.
3. Mutallimov M.M., Amirova L.I., Aliev F.A., Faradjova Sh.A., Maharramov I.A. Remarks to the paper: sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions // TWMS J. Pure Appl. Math. V.9, N.2, 2018, pp. 243-246.
4. Mutallimov M.M., Zulfugarova R.T., Amirova L.I. Sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions // Adv. Differ. Equ. 2015, 233 (2015).
5. Abramov A.A. O perenose qranichnix usloviy dla system lineynix obiknovennix differensialmnix uravneniy (variant metoda proqonki). // Jurnal vichislitelno matematiki i matematicheskoy fiziki, 1961, T.1, №3, p. 542-545. (Abramov A.A. On the transfer of boundary conditions for systems of linear ordinary differential equations (a variant of the sweep method). // Journal of computational mathematics and mathematical physics, 1961, V.1, No. 3, p. 542-545.) (in Russian)
6. Aliyev F. A., Mutallimov M. M., Ismailov N. A., Radjabov M. F. Alqoritmi postroeniya optimalnix regulyatorov pri qazliftnoy ekspluatasii // Avtomatika I telemexanika, 2012, № 8, c.3–15. (Aliev F. A., Mutallimov M. M., Ismailov N. A., Radjabov M. F. Algorithms for the construction of optimal controllers for gas-lift operation // Automation and Remote Control, 2012, No. 8, p.3-15.) (in Russian)
7. Aliev F.A. Zadacha optimalnoqo upravleniya lineynoy sistemoy s nerazdelennimi dvuxtochechnimi kraevimi usloviyami //

Differensialnie uravneniya, 1986, № 2, c. 345-347. (Aliev F.A. The problem of optimal control of a linear system with unseparated two-point boundary conditions. // Differential equations,1986, No.2, p.345-347.) (in Russian)

8. Aliev F.A. Zadacha optimizasii s dvuxtochechnimi kraevimi usloviyami // Izestia AN SSSR, ser. tekh. Kibernetika, 1985, № 6, c. 138-146. (Aliev F.A. Optimization problem with unseparated two-point boundary conditions // News AN USSR, cybernetics, 1985, No.6, p. 138-146.) (in Russian)
9. Aliev F.A. Metodi resheniya prikladnix zadach optimizasii dinamicheskix system, Baku: Elm, 1989, 320 s. (Aliev F.A. Methods for solving applied problems of optimizing dynamic systems. Baku: Elm, 1989, 320 p.) (in Russian)
10. Aliev F.A., Ismailov N.A. Metodi resheniya zadach optimizasii s dvuxtochechnimi kraevimi usloviyami, Preprint / AN Azerb. SSR, Institut Fiziki, Baku, 1985,N 151, 63 s. (Aliev F.A., Ismailov N.A. Methods for solving optimization problems with point-to-point boundary conditions, Preprint / AS Azerb. SSR, Institute of Physics, Baku, 1985,No 151, 63 p.) (in Russian)
11. Bellman R., Kalaba R. Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems. New York: Elsevier, 1965, 208 p.
12. Bordyug V.L., Larin V.B., Timoshenko A.G. Zadachi upravleniya shagayushimi apparatami, Kiev: Nauk.Dumka, 1985, 264 s. (Bordyug V.L., Larin V.B., Timoshenko A.G. The control problem of walking apparatus. Kiev: Nauk.Dumka, 1985, 264 p.) (in Russian)
13. Bryson A E, Jr. & Ho Y C. Applied optimal control: optimization, estimation, and control . Waltham, MA: Blaisdell, 1969. 481 p.
14. Gantmacher F.R. Teoriya matris. M.: Nauka, 1967, 576 s. (Gantmacher F.R. The theory of matrices. M.: Nauka, 1967, 576 p.) (in Russian)
15. Larin V.B. Upravlenie shagayushimi apparatami, Kiev: Nauk.Dumka, 1985, 264 p.) (Larin V.B. The control of walking apparatus. Kiev: Nauk.Dumka, 1980, 168 p.) (in Russian)
16. Maksudov F.G., Aliyev F.A. Optimizasiya impulsnix system s nerazdelennimi dvuxtochechnimi kraevimi usloviyami. // Dokl.AN SSSR, 1985, T.280, № 4, s. 796-798. (Maksudov F.G., Aliyev F.A. Optimization of pulse systems with unseparated two-point boundary conditions // Dokl.AS SSSR, 1985, v.280, № 4, p. 796-798.) (in Russian)
17. Mutallimov M.M., Aliyev F.A. Metodi resheniya zadach optimizasii pri ekspluatasii neftyanix skvajin. Saarbrücken (Deutscland): LAP LAMBERT, 2012, 164 p. (Mutallimov M.M., Aliyev F.A. Methods for

solving optimization problems in the operation of oil wells. Saarbrücken (Deutscland): LAP LAMBERT, 2012, 164 p.) (in Russian)

18. Polak E.. Chislennie metodi optimizasii. Ediniy podkhod. Moskva: Mir, 1971, 424 p. (Polak E. Computational methods in optimization Unified approach. Moscow: Mir, 1971, 424 p.) (in Russian)
19. Shamansky V.E. Metodi chislennoqo resheniya kraevix na ESVM. Kiev: Nauk. Dumka, Part I, 1963, 196 s., Part II, 1966, 244 s. (Shamansky V.E. Methods for numerical solution of boundary value problems at the ECM. Kiev: Nauk. Dumka, Part I, 1963, 196 p., Part II, 1966, 244 p.) (in Russian)